



TITLE:

Eisenstein級数のFourier-Jacobi係数について(保型的L関数の構成とその応用)

AUTHOR(S):

池田, 保

CITATION:

池田, 保. Eisenstein級数のFourier-Jacobi係数について(保型的L関数の構成とその応用). 数理解析研究所講究録 1992, 792: 172-186

ISSUE DATE:

1992-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/82700>

RIGHT:

Eisenstein 級数の Fourier-Jacobi 係数について.

京都大 池田 保 (Tamotsu Ikeda)

§1. Jacobi groups 上の automorphic form.

k を global field, \mathbf{A} を K の adèle 環、 ψ を \mathbf{A}/k の non-trivial な additive character とする。 V を K 上定義された 2-step unipotent algebraic group で Z をその center とする。 S を non-trivial な homomorphism $Z \rightarrow k$ とする。 $V/\text{Ker}(S)$ が $Z/\text{Ker}(S)$ を center とする Heisenberg group である時、 S は non-degenerate であるという。 H を k 上定義された algebraic group で V に作用しているものとする。 H の action が Z, S を stabilize する時、 H と V の半直積 D を Jacobi group ということとする。 $D_0 = D/\text{Ker}(S)$, $V_0 = V/\text{Ker}(S)$, $Z_0 = Z/\text{Ker}(S)$ とおく。 H の action は $V/Z = V_0/Z_0$ の symplectic structure を保つので $H \rightarrow \text{Sp}_{V/Z}$ が定義できる。 $\text{Sp}_{V/Z}(\widetilde{\mathbf{A}})$ を $\text{Sp}_{V/Z}(\mathbf{A})$ の metaplectic cover とする。 $H(\mathbf{A})$ の covering $\widetilde{H(\mathbf{A})}$ を fibre product

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{H(\mathbf{A})}(\mathbf{A}) & \rightarrow & H(\mathbf{A}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sp}_{V/Z}(\widetilde{\mathbf{A}}) & \rightarrow & \text{Sp}_{V/Z}(\mathbf{A}) \end{array}$$

で定義する。 $\widetilde{D(\mathbf{A})}$ を $V(\mathbf{A})$ と $\widetilde{H(\mathbf{A})}$ の半直積、 J を V と $\text{Sp}_{V/Z}$ の半直積、 $\widetilde{J(\mathbf{A})}$ を $V(\mathbf{A})$ と $\text{Sp}_{V/Z}(\widetilde{\mathbf{A}})$ の半直積とする。 $V \rightarrow V_0, H \mapsto \text{Sp}_{V/Z}$ は $D \rightarrow J, \widetilde{D(\mathbf{A})} \rightarrow \widetilde{J(\mathbf{A})}$ を induce するので、これを ι で表す。

$\widetilde{D(\mathbf{A})}$ の表現で、 $Z(\mathbf{A})$ が $\psi_S := \psi \circ S$ で作用するものを考える。 V_0 は Heisenberg group なので、次のような座標がとれる。

$$V_0 = \{(x, y, z) \mid x, y \in k^n, z \in k\}.$$

V_0 の composition law は、

$$(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{(x_1 {}^t y_2 - x_2 {}^t y_1)}{2})$$

で与えられる。 V_0 の subgroup X, Y を

$$X = \{(x, y, z) \mid y = 0, z = 0\},$$

$$Y = \{(x, y, z) \mid x = 0, z = 0\}.$$

で定義すると X と Y は V/Z の maximal totally isotropic subspace で、 $X \oplus Y \simeq V/Z$.

$Sp_{V/Z} = Sp_n$ は V_0 に右から

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = (xA + yC, xB + yD, z)$$

によって作用している。 $V_0(\mathbf{A})$ の $\mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ の上への Schrödinger 表現 ω_ψ は

$$\omega_\psi(v)\phi(t) = \phi(t+x)\psi(z + t {}^t y + \frac{1}{2}x {}^t y),$$

$v = (x, y, z) \in V_0(\mathbf{A})$, $\phi \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ によって与えられる。

Stone von-Neumann の定理により、 ω_ψ は $V_0(\mathbf{A})$ の規約表現で $Z_0(\mathbf{A})$ が ψ で作用する唯一のものである。 $V_0(\mathbf{A})$ の Schrödinger 表現は $\widetilde{J(\mathbf{A})}$ の Weil 表現 ω_ψ に一意的に拡張される。 ω_ψ は次の式で定まる。

$$\omega_\psi \left(\left(\begin{pmatrix} A & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & {}^t A^{-1} \end{pmatrix}, \varepsilon \right) \right) \phi(t) = \varepsilon \frac{\gamma(1)}{\gamma(\det A)} |\det A|^{\frac{1}{2}} \phi(tA),$$

$$\omega_\psi \left(\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & B \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \end{pmatrix}, \varepsilon \right) \right) \phi(t) = \varepsilon \psi\left(\frac{1}{2}tB^t t\right) \phi(t),$$

$$\omega_\psi \left(\left(\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix}, \varepsilon \right) \right) \phi(t) = \varepsilon \gamma(1)^{-n} \mathcal{F}\phi(t).$$

ここで、 $\mathcal{F}\phi$ は ψ によって定まる ϕ の Fourier 変換で

$$\mathcal{F}\phi(t) = \int_{X(\mathbf{A})} \phi(x) \psi(t^t x) dx.$$

$\gamma(\alpha)$, $\alpha \in \mathbf{A}^\times$ は ψ によって定まる Weil constant で

$$\int_{\mathbf{A}} \mathcal{F}\varphi(t) \psi\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) dt = \gamma(\alpha) \int_{\mathbf{A}} \varphi(t) \psi\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) dt,$$

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$ で与えられる。 ω_ψ の $Sp_n(\mathbf{A})$ への制限も ω_ψ で表す。

$\phi \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ に対して theta function $\Theta^\phi(vh)$ を

$$\begin{aligned} \Theta^\phi(vh) &= \sum_{l \in X(k)} \omega_\psi(vh) \phi(l) \\ &= \sum_{l \in X(k)} \omega_\psi(h) \phi(l+x) \psi\left(z + l^t y + \frac{1}{2}x^t y\right), \end{aligned}$$

$v \in V_0(\mathbf{A})$, $h \in Sp_n(\mathbf{A})$ で定義する。

$C_\psi^\infty(V_0(k) \backslash V_0(\mathbf{A}))$ を $V_0(k) \backslash V_0(\mathbf{A})$ 上の smooth function で、 $f(zv) = \psi(z)f(v)$, $z \in Z(\mathbf{A})$ をみたすものの空間とする。 $C_\psi^\infty(V_0(k) \backslash V_0(\mathbf{A}))$ には C^∞ -topology を入れる。 $\phi \mapsto \Theta^\phi$ で与えられる線形写像

$$\theta : \mathcal{S}(X(\mathbf{A})) \longrightarrow C_\psi^\infty(V_0(k) \backslash V_0(\mathbf{A}))$$

は topological isomorphism になる。 $\mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ 上には $\widetilde{J}(\mathbf{A})$ 不変な non-degenerate Hermitian inner product

$$(\phi_1, \phi_2) = \int_{X(\mathbf{A})} \phi_1(t) \overline{\phi_2(t)} dt$$

が存在する。この時、

$$(\phi_1, \phi_2) = \int_{Z_0(\mathbf{A})V_0(k) \setminus V_0(\mathbf{A})} \Theta^{\phi_1}(v) \overline{\Theta^{\phi_2}(v)} dv.$$

が成り立つ。特に、 ω_ψ の contragredient 表現は、 $\omega_{\psi^{-1}} = \overline{\omega_\psi}$ に等しい。

$S_\psi(V_0(\mathbf{A}))$ を $V_0(\mathbf{A})$ 上の smooth function φ で次の 1), 2) をみたすものの空間とする。

- 1) $\varphi(zv) = \psi^{-1}(z)\varphi(v)$.
- 2) $|\varphi|$ は $Z_0(\mathbf{A}) \setminus V_0(\mathbf{A})$ 上で rapidly decreasing .

$S_\psi(V_0(\mathbf{A}))$ は線形空間として $S((X \oplus Y)(\mathbf{A}))$ と同形である。この同形によって $S_\psi(V_0(\mathbf{A}))$ に topology を入れる。

(σ, W) を $V_0(\mathbf{A})$ の表現で $Z_0(\mathbf{A})$ が ψ で作用するようなものとする。 σ が $S_\psi(V_0(\mathbf{A}))$ に拡張されるとは次の積分

$$\sigma(\varphi)w = \int_{Z_0(\mathbf{A})/V_0(\mathbf{A})} \varphi(v)\sigma(v)w dv$$

が全ての $\varphi \in S_\psi(V_0(\mathbf{A}))$ について収束して separately continuous linear map $S_\psi(V_0(\mathbf{A})) \times W \rightarrow W$ を与えることとする。Schrödinger 表現 ω_ψ は $S_\psi(V_0(\mathbf{A}))$ に拡張され、 $\omega_\psi(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$ が成り立つ。

$\phi_1, \phi_2 \in S(X(\mathbf{A}))$ に対して、

$$\varphi(v) = \int_{X(\mathbf{A})} \phi_1(t - \frac{x}{2}) \overline{\phi_2(t + \frac{x}{2})} \psi(-z - t^t y) dt$$

とおけば $\varphi \in S_\psi(V_0(\mathbf{A}))$ であって、

$$\omega_\psi(\varphi)\phi = (\phi, \phi_2) \cdot \phi_1$$

が成り立つ。さらにこのような φ は $S_\psi(V_0(\mathbf{A}))$ を生成する。

Lemma 1: ϕ_1, ϕ_2, φ を上のように定める時、

$$\sum_{l \in Z_0(k)/V_0(k)} \varphi(h^{-1}v^{-1}l u h) = \Theta^{\phi_1}(vh) \overline{\Theta^{\phi_2}(uh)},$$

$h \in \widetilde{Sp_n(\mathbf{A})}$ $u, v \in V_0(\mathbf{A})$ が成り立つ。

証明: u の関数として両辺は $C_{\psi-1}^\infty(V_0(k) \setminus V_0(\mathbf{A}))$ の元である。任意の $\phi \in \mathcal{S}(V_0(\mathbf{A}))$ に対して

$$\begin{aligned} & \int_{Z_0(\mathbf{A})V_0(k) \setminus V_0(\mathbf{A})} \sum_{l \in Z_0(k) \setminus V_0(k)} \varphi(h^{-1}v^{-1}l u h) \Theta^\phi(uh) du \\ &= \int_{Z_0(\mathbf{A}) \setminus V_0(\mathbf{A})} \varphi(h^{-1}v^{-1}u h) \Theta^\phi(uh) du \\ &= \int_{Z_0(\mathbf{A}) \setminus V_0(\mathbf{A})} \varphi(u) \Theta^\phi(vhu) du \\ &= \Theta^{\omega_\psi(\varphi)\phi}(vh) \\ &= (\phi, \phi_2) \Theta^{\phi_1}(vh). \end{aligned}$$

が成り立つ。Hermitian form $(,)$ は non-degenerate だから Lemma がいえる。

Lemma 2: (σ, W) を $V_0(\mathbf{A})$ の表現で $Z_0(\mathbf{A})$ が ψ で作用するようなものとする。 σ が $\mathcal{S}_\psi(V_0(\mathbf{A}))$ に拡張されるものとする。この時、 $\sigma(\mathcal{S}_\psi(V_0(\mathbf{A})))W$ W において dense である。

証明: \tilde{w} を W 上の linear functional で、任意の $\varphi \in \mathcal{S}_\psi(V_0(\mathbf{A}))$, $w \in W$ に対して $\langle \sigma(\varphi)w, \tilde{w} \rangle = 0$ となるようなものとする。すると 任意の $v_1 = (x_1, y_1, z_1) \in V_0(\mathbf{A})$ に対して、

$$\begin{aligned} \langle \sigma(v_1)\sigma(\varphi)\sigma(v_1^{-1})w, \tilde{w} \rangle &= \int_{Z_0(\mathbf{A}) \setminus V_0(\mathbf{A})} \varphi(v) \langle \sigma(v_1 v v_1^{-1})w, \tilde{w} \rangle dv \\ &= \int_{V_0(\mathbf{A})} \langle \sigma(v)w, \tilde{w} \rangle \varphi(v) \psi(x_1 y - x y_1) dv. \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\text{Supp}(\varphi)$ が mod $Z_0(\mathbf{A})$ で compact なら この積分は絶対収束して $\langle \sigma(v)w, \tilde{w} \rangle \varphi(v)$ の Fourier 変換に等しい。よって、 $\langle \sigma(v)w, \tilde{w} \rangle$ は恒等的に 0 でなくてはならない。

$C_S^\infty(D(k)\backslash\widetilde{D(\mathbf{A})})$ $D(k)\backslash\widetilde{D(\mathbf{A})}$ 上の関数 f で $f(zvh) = \psi_S(z)f(vh)$, $z \in Z(\mathbf{A})$, $v \in V(\mathbf{A})$, $h \in \widetilde{H(\mathbf{A})}$. をみたすものの空間とする。Theta function Θ^ϕ , $\phi \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ も ι によるひきもどしで $C_S^\infty(D(k)\backslash\widetilde{D(\mathbf{A})})$ の元とみなす。

Corollary: W を $C_S^\infty(D(k)\backslash\widetilde{D(\mathbf{A})})$ の closed subspace で $V(\mathbf{A})$ の元による right translation で不変なものとする。この時、次の形の関数

$$\Theta^{\phi_1}(vh) \int_{V(k)\backslash V(\mathbf{A})} f(uh) \overline{\Theta^{\phi_2}(uh)} du,$$

$v \in V(\mathbf{A})$, $h \in \widetilde{H(\mathbf{A})}$, $f \in W$, $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ によって W は生成される。

証明: W を right translation ρ により、 $V(\mathbf{A})$ の表現とみなす。Lemma 1 の φ をとると、

$$\begin{aligned} \rho(\varphi)f(vh) &= \int_{Z(\mathbf{A})\backslash V(\mathbf{A})} \varphi(u)f(vhu)du \\ &= \int_{Z(\mathbf{A})\backslash V(\mathbf{A})} \varphi(h^{-1}v^{-1}uh)f(uh)du \\ &= \int_{Z(\mathbf{A})V(k)\backslash V(\mathbf{A})} \sum_{l \in Z(k)\backslash V(k)} \varphi(h^{-1}v^{-1}luh)f(uh)du. \end{aligned}$$

この積分は絶対収束するから Lemma 2 の条件がみたされる。

Remark: Stone von Neumann の定理により $\widetilde{D(\mathbf{A})}$ の表現 π で $Z_0(\mathbf{A})$ が ψ で作用するようなものは、tensor product:

$$(\omega_\psi \circ \iota) \otimes \tau.$$

でかける。ここで ω_ψ は $\widetilde{J(\mathbf{A})}$ の Weil 表現で、 τ は $\widetilde{iH(\mathbf{A})}$ の表現である。Corollary 3 の意味するところは π が $C_S^\infty(D(k)\backslash\widetilde{D(\mathbf{A})})$ 上に実現されている時には τ は次のような $H(k)\backslash\widetilde{H(\mathbf{A})}$ 上の関数の空間であるということである。

$$\int_{V_0(k)\backslash V_0(\mathbf{A})} f(uh) \overline{\Theta^\phi(uh)} du,$$

$$h \in \widetilde{H(\mathbf{A})}, f \in W, \phi \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A})).$$

§2. Siegel 型の Eisenstein series .

Symplectic group 上に定義された Siegel 型の Eisenstein series を考える。\$m, n\$ を正整数とする。

$$\begin{aligned} G = Sp_{m+n} &= \left\{ g \in GL_{2m+2n} \mid g \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{m+n} & \mathbf{1}_{m+n} \\ -\mathbf{1}_{m+n} & \mathbf{0}_{m+n} \end{pmatrix} {}^t g = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{m+n} & \mathbf{1}_{m+n} \\ -\mathbf{1}_{m+n} & \mathbf{0}_{m+n} \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid A, B, C, D \in M_{m+n}(k), \right. \\ &\quad \left. A {}^t B = B {}^t A, C {}^t D = D {}^t C, A {}^t D - B {}^t C = \mathbf{1}_{m+n} \right\}, \end{aligned}$$

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0}_{m+n} & {}^t A^{-1} \end{pmatrix} \mid A \in GL_{m+n}, A^{-1} B \in \text{Sym}_{m+n}(k) \right\},$$

$$Z = \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} & z & 0 \\ \mathbf{1}_{m+n} & 0 & \mathbf{0}_n \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & \mathbf{1}_{m+n} & \end{array} \right) \mid z \in \text{Sym}_m(k) \right\},$$

$$V = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_m & x & z & y/2 \\ 0 & \mathbf{1}_n & {}^t y/2 & \mathbf{0}_n \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & & \mathbf{1}_m & 0 \\ & & -{}^t x & \mathbf{1}_n \end{array} \right) \mid x, y \in M_{mn}(k), z - \frac{x {}^t y}{2} \in \text{Sym}_m(k) \right\},$$

$$X = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_m & x & & \\ 0 & \mathbf{1}_n & \mathbf{0}_{m+m} & \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & & \mathbf{1}_m & 0 \\ & & -{}^t x & \mathbf{1}_n \end{array} \right) \mid x \in M_{mn}(k) \right\},$$

$$Y = \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} & \mathbf{0}_m & y/2 \\ \mathbf{1}_{m+n} & {}^t y/2 & \mathbf{0}_n \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & \mathbf{1}_{m+n} & \end{array} \right) \mid y \in M_{mn}(k) \right\},$$

$$H = \left\{ \left(\left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_m & 0 & \mathbf{0}_m & 0 \\ 0 & A & 0 & B/2 \\ \hline \mathbf{0}_m & 0 & \mathbf{1}_m & 0 \\ 0 & 2C & 0 & D \end{array} \right) \middle| \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_n \right\}.$$

Z は $\text{Sym}_m(k)$ と自然に同一視される。 Z から k への homomorphism は $z \mapsto \text{tr}(zS)$, $S \in \text{Sym}_m(k)$ とかける。この homomorphism も S で表す。 $V_0 = V/\text{Ker}(S)$ が Heisenberg group になるためには、 $\det S \neq 0$ が必要十分である。 H と Sp_n を次によって同一視する。

$$\left(\left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_m & 0 & \mathbf{0}_m & 0 \\ 0 & A & 0 & B/2 \\ \hline \mathbf{0}_m & 0 & \mathbf{1}_m & 0 \\ 0 & 2C & 0 & D \end{array} \right) \right) \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

$$w_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_i & \mathbf{1}_i \\ -\mathbf{1}_i & \mathbf{0}_i \end{pmatrix} \text{ とおく.}$$

$\widetilde{H(\mathbf{A})}$ の $S(X(\mathbf{A}))$ における Weil 表現 ω_S は次の式であたえられる。

$$\omega_S \left(\left(\begin{pmatrix} A & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & {}^t A^{-1} \end{pmatrix}, \varepsilon \right) \right) \phi(X) = \varepsilon^m \frac{\gamma_S(1)}{\gamma_S(\det A)} |\det A|^{\frac{m}{2}} \phi(XA),$$

$$\omega_S \left(\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & B \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \end{pmatrix}, \varepsilon \right) \right) \phi(X) = \varepsilon^m \psi_S\left(\frac{1}{2}XB {}^t X\right) \phi(X),$$

$$\omega_S \left(\left(\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix}, \varepsilon \right) \right) \phi(X) = \varepsilon^m \gamma_S(1)^{-n} \mathcal{F}\phi(X),$$

$$\mathcal{F}\phi(X) = \int_{X(\mathbf{A})} \phi(Y) \psi(\text{tr}SX {}^t Y) dY.$$

ここで $\gamma_S(\alpha)$ は S に関する Weil constant で、 S が $\text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_m)$ に同値の時、

$$\gamma_S(\alpha) = \prod_{i=1}^m \gamma(s_i \alpha).$$

ω を A^\times/k^\times の unitary quasi-character、 $s \in \mathbb{C}$ とする。 $I(\omega, s) = I_G(\omega, s)$ を $G(A)$ 上の関数 f で、次をみたすものの空間とする。

$$f(pg) = \omega(\det A) |\det A|^{s+\rho} f(g),$$

$g \in G(A)$, $p = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0}_{m+n} & {}_tA^{-1} \end{pmatrix} \in P(A)$. ここで、 $\rho = \frac{m+n+1}{2}$. また、 f は $G(A)$ の standard maximal compact subgroup に関して right finite であるとする。

同様に $I(\omega, s)^\sim = I_G(\omega, s)^\sim$ を $\widetilde{G(A)} = \widetilde{Sp_{m+n}(A)}$ 上の関数 f で、次をみたすものの空間とする。

$$f(pg) = \varepsilon \frac{\gamma(1)}{\gamma(\det A)} \omega(\det A) |\det A|^{s+\rho} f(g),$$

$g \in G(A)$, $p = \left(\begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0}_{m+n} & {}_tA^{-1} \end{pmatrix}, \varepsilon \right) \in \widetilde{P(A)}$. ここで、 $\widetilde{P(A)}$ は $P(A)$ の $\widetilde{Sp_{m+n}(A)}$ における inverse image.

type (ω, s) (resp. $(\omega, s)^\sim$) の Eisenstein series $E(g; f)$ を次のように定義する。

$$E(g; f) = \sum_{\gamma \in P \backslash G} f(\gamma g),$$

$f \in I_G(\omega, s)$ (resp. $I_G(\omega, s)^\sim$). これは $\operatorname{Re}(s) \gg 0$ のとき絶対収束して、 f が s に holomorphic に depend する時、全 s -平面に解析接続される。

§3. Fourier-Jacobi 係数

定義: φ を $G(k) \backslash G(A)$ 上の C^∞ -function とする。 φ の Fourier-Jacobi 係数 φ_S とは $D(k) \backslash \widetilde{D(A)}$ 上の関数

$$\varphi_S(vh) = \int_{Z(k) \backslash Z(A)} \varphi(zvh) \psi_S^{-1}(z) dz$$

$v \in V(A)$, $h \in \widetilde{H(A)}$ のこととする。 φ_S は $C_S^\infty(D(k) \backslash \widetilde{D(A)})$ に属する。

§1 の結果より、Eisenstein series の Fourier-Jacobi 係数によって生成される $\widetilde{D(\mathbf{A})}$ の表現は次の形の積分で表される関数で生成される。

$$\Theta^{\phi_1}(vh) \int_{V(k) \backslash V(\mathbf{A})} E_S(uh; f) \overline{\Theta^{\phi_2}(uh)} dv$$

$v \in V(\mathbf{A}), h \in \widetilde{H(\mathbf{A})}, \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$.

それゆえ

$$\int_{V(k) \backslash V(\mathbf{A})} E_S(vh; f) \overline{\Theta^{\phi}(vh)} dv \quad (1)$$

$\phi \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ の形の関数を考えるのは自然である。

Q を G における V の normalizer とする。両側剰余類 $W_P \backslash W_G / W_Q$ の完全代表系として、

$$\xi_i = \left(\begin{array}{cc|cc} 0_{m-i} & 0 & 1_{m-i} & 0 \\ 0 & 1_{n+i} & 0 & 0_n \\ \hline -1_{m-i} & 0 & 0_{m-i} & 0 \\ 0 & 0_{n+i} & 0 & 1_{n+i} \end{array} \right),$$

$i = 0, 1, \dots, m$. Open cell は $P\xi_0 Q$ だけであることを注意しておく。

Lemma 3: $\gamma \in G \notin P\xi_0 Q$, ならば $\gamma^{-1}P\gamma \cap Z$ 上で S は non-trivial.

証明: $q \in Q$ の時 q は Z を normalize して qSq^{-1} もまた non-degenerate だから $\gamma = \xi_i$, $i > 0$, としてよい。この時 $\gamma^{-1}P\gamma \cap Z$ は Z の最後の行と列からなる部分空間を含む。明らかに S はこの部分空間の上で non-degenerate.

$\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ の Hilbert symbol を \langle, \rangle で表す。 $\chi_a(x) = \langle a, x \rangle$ とおく。

定理: $f \in I(\omega, s)$ または $f \in I(\omega, s)^\sim$ とする。 $\phi \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ は $\widetilde{H(\mathbf{A})}$ の standard maximal compact subgroup の ω_S による作用で有限であるとする。また、 $\text{Re}(s)$ は十分大きいとする。この時、(1) は 次の関数からえられる Eisenstein series である。

$$R(h; f, \phi) = \int_{V(\mathbf{A})} f(w_{m+n}vw_nh) \overline{\omega_\psi(vw_nh)\phi(0)} dv.$$

$R(h; f, \phi)$ の型はつぎのとおり。

$$\begin{cases} I_H(\omega\chi_a, s), & a = (-1)^{\frac{m}{2}} \det S, & 2|m, f \in I_G(\omega, s) \\ I_H(\omega\chi_a, s)^\sim, & a = (-1)^{\frac{m}{2}} \det S, & 2|m, f \in I_G(\omega, s)^\sim \\ I_H(\omega\chi_a, s)^\sim, & a = (-1)^{\frac{m+1}{2}} \det S, & 2 \nmid m, f \in I_G(\omega, s) \\ I_H(\omega\chi_a, s), & a = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \det S, & 2 \nmid m, f \in I_G(\omega, s)^\sim \end{cases}$$

証明: (1) は絶対収束であるとしてよい。簡単のため $f \in I(\omega, s)$ であるとする。剰余類 $P \backslash G$ を次のように分割する。

$$P \backslash G = \cup_{i>0} (P \backslash P\xi_i Q) \cup (P \backslash P\xi_0 Q).$$

この分割により、

$$\begin{aligned} \int_{V(k) \backslash V(\mathbf{A})} E_S(vh; f) \overline{\Theta^\phi(vh)} dv &= \int_{V(k) \backslash V(\mathbf{A})} E(vh; f) \overline{\Theta^\phi(vh)} dv \\ &= \sum_{i>0} \sum_{\gamma \in P \backslash P\xi_i Q} \int_{V(k) \backslash V(\mathbf{A})} f(\gamma vh) \overline{\Theta^\phi(vh)} dv \\ &\quad + \sum_{\gamma \in P \backslash P\xi_0 Q} \int_{V(k) \backslash V(\mathbf{A})} f(\gamma vh) \overline{\Theta^\phi(vh)} dv. \end{aligned}$$

となる。Lemma 3 により最初の項は 0 に等しい。さらに最初の剰余類は

$$P \backslash P\xi_0 Q = \xi_0 \cdot (Y \backslash V) \cdot (P_H \backslash H).$$

$$P_H = \left\{ \begin{pmatrix} A & * \\ \mathbf{0}_n & {}_t A^{-1} \end{pmatrix} \mid A \in GL_n \right\}$$

と分割される。 $\gamma \in H$ は $V(k), V(\mathbf{A})$ を normalize するので最初の項は次のように変形さ

れる。

$$\begin{aligned}
& \sum_{\gamma \in P \setminus P\xi_0 Q} \int_{V(k) \setminus V(\mathbf{A})} f(\gamma v h) \overline{\Theta^\phi(vh)} dv \\
&= \sum_{\gamma_1 \in Y \setminus V} \sum_{\gamma \in P_H \setminus H} \int_{V(k) \setminus V(\mathbf{A})} f(\xi_0 \gamma_1 \gamma v h) \overline{\Theta^\phi(vh)} dv \\
&= \sum_{\gamma_1 \in Y \setminus V} \sum_{\gamma \in P_H \setminus H} \int_{V(k) \setminus V(\mathbf{A})} f(\xi_0 \gamma_1 v \gamma h) \overline{\Theta^\phi(v \gamma h)} dv \\
&= \sum_{\gamma \in P_H \setminus H} \int_{Y(k) \setminus V(\mathbf{A})} f(\xi_0 v \gamma h) \overline{\Theta^\phi(v \gamma h)} dv \\
&= \sum_{\gamma \in P_H \setminus H} \int_{Y(k) \setminus V(\mathbf{A})} f(\xi_0 v \gamma h) \sum_{l \in Y(k)} \overline{\mathcal{F}(\omega_S(lv \gamma h) \phi(0))} dv \\
&= \sum_{\gamma \in P_H \setminus H} \int_{V(\mathbf{A})} f(\xi_0 v \gamma h) \overline{\mathcal{F}(\omega_S(v \gamma h) \phi(0))} dv \\
&= \sum_{\gamma \in P_H \setminus H} \int_{V(\mathbf{A})} f(\xi_0 v \gamma h) \overline{\omega_S(w_n v \gamma h) \phi(0)} dv \\
&= \sum_{\gamma \in P_H \setminus H} \int_{V(\mathbf{A})} f(w_{m+n} v w_n \gamma h) \overline{\omega_S(v w_n \gamma h) \phi(0)} dv.
\end{aligned}$$

よって、

$$(1) = \sum_{\gamma \in P_H \setminus H} R(\gamma h; f, \phi)$$

が示された。 $R(h; f, \phi)$ の型が求めるものであることを示す。 そのために $R(h; f, \phi)$ を少

し変形する。

$$\begin{aligned}
 R(h; f, \phi) &= \int_{V(\mathbf{A})} f(w_{m+n} v w_n h) \overline{\omega_S(v w_n h) \phi(0)} dv \\
 &= \int_{X(\mathbf{A})} \int_{Y(\mathbf{A})} \int_{Z(\mathbf{A})} f \left(w_{m+n} \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{1}_m & x & \\ 0 & \mathbf{1}_n & \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & & \end{array} \begin{array}{cc} z - x {}^t y/2 & y/2 \\ {}^t y/2 & \mathbf{0}_n \\ \hline \mathbf{1}_m & 0 \\ -{}^t x & \mathbf{1}_n \end{array} \right) w_n h \right) \\
 &\quad \times \overline{\omega_S(w_n h) \phi(x) \psi(\text{tr}(S(z + x {}^t y/2)))} dz dy dx \\
 &= \int_{X(\mathbf{A})} \int_{Y(\mathbf{A})} \int_{Z(\mathbf{A})} f \left(w_{m+n} \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{1}_{m+n} & z & y/2 \\ {}^t y/2 & \mathbf{0}_n & \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & & \mathbf{1}_{m+n} \end{array} \right) w_n h \right) \\
 &\quad \times \overline{\omega_S(w_n h) \phi(x) \psi(\text{tr}(S(z + x {}^t y)))} dz dy dx \\
 &= \int_{Y(\mathbf{A})} \int_{Z(\mathbf{A})} f \left(w_{m+n} \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{1}_{m+n} & z & y/2 \\ {}^t y/2 & \mathbf{0}_n & \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & & \mathbf{1}_{m+n} \end{array} \right) w_n h \right) \\
 &\quad \times \overline{\mathcal{F}(\omega_S(w_n h) \phi)(y) \psi_S(z)} dz dy \\
 &= \int_{Y(\mathbf{A})} \int_{Z(\mathbf{A})} f \left(w_{m+n} \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{1}_{m+n} & z & y/2 \\ {}^t y/2 & \mathbf{0}_n & \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & & \mathbf{1}_{m+n} \end{array} \right) w_n h \right) \\
 &\quad \times \overline{\omega_S(h) \phi(y) \psi_S(z)} dz dy \\
 &= \int_{Y(\mathbf{A})} \int_{Z(\mathbf{A})} f \left(w_{m+n} \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{1}_{m+n} & z & y \\ {}^t y & \mathbf{0}_n & \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & & \mathbf{1}_{m+n} \end{array} \right) w_n h \right) \\
 &\quad \times \overline{\omega_S(h) \phi(2y) \psi_S(z)} dz dy.
 \end{aligned}$$

$p = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{m+n} & B \\ \mathbf{0}_{m+n} & \mathbf{1}_{m+n} \end{pmatrix}, \varepsilon \right)$ とすると

$$w_{m+n} \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{1}_{m+n} & z & y \\ {}^t y & \mathbf{0}_n & \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & & \mathbf{1}_{m+n} \end{array} \right) w_n p$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_m & 0 & 0 & 0 \\ 2 {}^t y B & \mathbf{1}_n & 0 & B/2 \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & & \mathbf{1}_m & -2By \\ & & 0 & \mathbf{1}_n \end{array} \right) w_{m+n} \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_{m+n} & & z + 2yB {}^t y & y \\ & & {}^t y & \mathbf{0}_n \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & & \mathbf{1}_{m+n} & \end{array} \right) w_n.$$

であるから

$$\begin{aligned} R(ph; f, \phi) &= \int_{Y(\mathbf{A})} \int_{Z(\mathbf{A})} f \left(w_{m+n} \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_{m+n} & & z & y \\ & & {}^t y & \mathbf{0}_n \\ \hline \mathbf{0}_n & & & \mathbf{1}_n \end{array} \right) w_n ph \right) \\ &\quad \times \overline{\omega_S(ph) \phi(2y) \psi_S(z)} dz dy \\ &= \varepsilon^m \int_{Y(\mathbf{A})} \int_{Z(\mathbf{A})} f \left(w_{m+n} \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_{m+n} & & z + 2yB {}^t y & y \\ & & {}^t y & \mathbf{0}_n \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & & \mathbf{1}_{m+n} & \end{array} \right) w_n h \right) \\ &\quad \times \overline{\omega_S(h) \phi(2y) \psi_S(z + 2yB {}^t y)} dz dy \\ &= \varepsilon^m R(h; f, \phi). \end{aligned}$$

となる。また $p = \left(\begin{pmatrix} A & \mathbf{0}_{m+n} \\ \mathbf{0}_{m+n} & {}^t A^{-1} \end{pmatrix}, \varepsilon \right)$ の時には

$$w_{m+n} \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_{m+n} & & z & y \\ & & {}^t y & \mathbf{0}_n \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & & \mathbf{1}_{m+n} & \end{array} \right) w_n p = p w_{m+n} \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_{m+n} & & z & yA \\ & & {}^t(yA) & \mathbf{0}_n \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & & \mathbf{1}_{m+n} & \end{array} \right) w_n.$$

なので

$$\begin{aligned}
 R(ph; f, \phi) &= \int_{Y(\mathbf{A})} \int_{Z(\mathbf{A})} f \left(w_{m+n} \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{1}_{m+n} & z & y \\ & {}^t y & \mathbf{0}_n \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & \mathbf{1}_{m+n} & \end{array} \right) w_n ph \right) \\
 &\quad \times \overline{\omega_S(ph) \phi(2y) \psi_S(z)} dz dy \\
 &= \varepsilon^m \frac{\gamma_{-S}(1)}{\gamma_{-S}(\det A)} \omega(\det A) |\det A|^{s+m+\frac{n+1}{2}} \int_{Y(\mathbf{A})} \int_{Z(\mathbf{A})} \\
 &\quad f \left(w_{m+n} \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{1}_{m+n} & z & yA \\ & {}^t(yA) & \mathbf{0}_n \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & \mathbf{1}_{m+n} & \end{array} \right) w_n h \right) \overline{\omega_S(h) \phi(2yA) \psi_S(z)} dz dy \\
 &= \varepsilon^m \frac{\gamma_{-S}(1)}{\gamma_{-S}(\det A)} \omega(\det A) |\det A|^{s+\frac{n+1}{2}} R(h, f, \phi).
 \end{aligned}$$

よって Weil constant は等式

$$\gamma(a)\gamma(b) = \langle a, b \rangle \gamma(1)\gamma(ab)$$

をみたすから定理が証明された。

参考文献

1. S. Böcherer, Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen I, II
Math. Zeit. No.183 (1983) pp.21-46, ibid No.189 (1985) pp.81-110
2. R. P. Langlands, On the functional equations satisfied by Eisenstein series, Springer
Lecture Note in Math. No.544
4. G. Shimura, On Eisenstein series, Duke Math. Vol.50 (1983) pp.417-476
5. G. Shimura, On Eisenstein series of half-integral weight, Duke Math. Vol 52 (1985)
pp.281-314